Exercício 1: Obtenha as funções de onda e os níveis de energia associados de uma partícula confinada em uma caixa, em que $V(x) = 0$ para $0 \leq x \leq l$ e $V(x) = \infty$ sonst.

Exercício 2: Obtenha as funções de onda e os níveis de energia associados de uma partícula confinada em uma caixa bidimensional, no qual a partícula é confinada a uma superfície retangular com dimensões L_1 na direção x e L_2 na direção y, $V(x, y) = 0$ para $0 \leq x \leq L_1$ e $0 \leq y \leq L_2$ e $V(x, y) = \infty$ senão.

Exercício 3: Obtenha as energias dos estados ligados de uma partícula no poço de potencial em que $V(x) = \infty$ para $x < 0$, $V(x) = -V_0$ para $0 \leq x \leq L$ e $V(x) = 0$ para $x > L$. Compare os valores obtidos com aqueles do poço com paredes infinitamente altas.

Exercício 4: Considere uma partícula com energia E e um poço de energia potencial de profundidade finita tal que $V(x) = V_0$ para $-a/2 > x > a/2$ e $V(x) = 0$ para $-a/2 \leq x \leq a/2$.
a. Considerando o caso $E < V_0$, obtenha graficamente os valores dos momentos k associados aos níveis de energia permitidos à partícula.
b. Compare os valores permitidos de k obtidos no item a. com aqueles obtidos para um poço infinito unidimensional.
c. Obtenha os coeficientes de reflexão R e transmissão T para o caso em que $E > V_0$. Discuta o resultado.

Exercício 5: Monstre que as matrizes de espalhamento são interligadas pela equação

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{21}/T_{22} & T_{11} - T_{12}T_{21}/T_{22} \\ 1/T_{22} & -T_{12}/T_{22} \end{pmatrix} .$$

Exercício 6: Considere que uma partícula com a energia E seja lançada (na direção $\hat{e}_x$) de encontro a uma barreira de energia potencial de altura finita e largura infinita, tal que $V(x) = 0$ para $x < 0$ e $V(x) = V_0$ para $x \geq 0$.
a. Obtenha os coeficientes de reflexão R e transmissão T para o caso em que $E > V_0$. Discuta o resultado.
b. Faça o mesmo para o caso $E < V_0$.

Exercício 7: Considere que uma partícula com energia E seja lançada (na direção $\hat{e}_x$) de encontro a uma barreira de energia potencial de altura e largura finitas, tal que $V(x) = 0$ para $x < 0$ ou $x > l$ e $V(x) = V_0$ para $0 \leq x \leq l$.
a. Obtenha os coeficientes de reflexão R e transmissão T para o caso em que $E > V_0$. Discuta

o resultado.
b. Faça o mesmo para o caso $E < V_0$.

Exercício 8: Calcule o coeficiente de transmissão para o caso de uma partícula com energia E lançada de encontro à barreira de energia potencial $V(x) = \alpha\delta(x)$. O resultado se altera para o caso em que $V(x) = -\alpha\delta(x)$, com $\alpha > 0$? Para esta última energia potencial, encontre a energia do estado ligado da partícula e sua correspondente função de onda.

Exercício 9: Considere um OH de massa m e frequência angular ω preparado no estado estacionário $|n\rangle$ que consiste num autoestado do hamiltoniano $\hat{H}$ com autovalor $(n+1/2)\hbar\omega$.
a. Calcule os desvios quadráticos médios da posição $\hat{x}$ e do momento $\hat{p}$.
b. A partir dos resultados do item anterior obtenha a relação de incerteza $\Delta x \Delta p$ para o OH no estado $|n\rangle$.

Exercício 10: Igualando a energia do estado fundamental do OH quântico àquela do seu análogo clássico, obtenha a elongação máxima x_M considerando $\hbar = \omega = m = 1$. A partir daí, obtenha a expressão para a probabilidade de se encontrar o OH fora dos limites clássicos e estime o seu valor.

Exercício 11: Encontre os níveis de energia de uma partícula num poço de energia potencial da forma $V(x) = \infty$ para $x < 0$ e $V(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$ para $x > 0$.

Exercício 12: Demonstre que as autofunções do hamiltoniano $\hat{H} = -(\hbar/2m)(d^2/dx^2) + V(x)$ possuem paridade definida no caso em que a energia é uma função par, isto é, $V(x) = V(-x)$.

Exercício 13: Considere a evolução, governada pela equação de Schrödinger, de uma partícula livre descrita por um pacote de onda gaussiano unidimensional. Obtenha e analise a taxa de difusão do pacote.

Exercício 14: Considere um OH de massa m e frequência angular ω. No tempo $t = 0$ o estado do oscilador é $|\psi(0)\rangle = \sum_n c_n|\phi_n\rangle$, onde $|\phi_n\rangle$ são os estados estacionários do OH com energia $(n + 1/2)\hbar\omega$.
a. Qual é a probabilidade P para que uma medida da energia do OH, realizada num tempo arbitrário $t > 0$, resulte ser maior que $2\hbar\omega$? Para o caso em que $P = 0$, quais são os coeficientes c_n não nulos?
b. De agora em diante, assuma que somente c_0 e c_1 sejam não nulos. Escreva a condição de normalização para $|\psi(0)\rangle$ e o valor médio $\langle\hat{H}\rangle$ da energia em termos de c_0 e c_1. Com o requerimento adicional $\langle\hat{H}\rangle = \hbar\omega$, calcule $|c_0|^2$ e $|c_1|^2$.
c. Dado que o vetor de estado normalizado $|\psi(0)\rangle$ é definido a menos de um fator de fase global, determinamos este fator através da escolha dos coeficientes c_0 real e positivo e $c_1 = |c_1|e^{i\theta}$. Assumindo $\langle\hat{H}\rangle = \hbar\omega$ e $\langle\hat{X}\rangle = \sqrt{\hbar/m\omega}/2$, calcule θ.
d. Com $|\psi(0)\rangle$ determinado (conforme o item anterior), escreva $|\psi(t)\rangle$ para $t > 0$ e calcule o valor de θ neste tempo t. Deduza o valor médio $\langle\hat{X}\rangle(t)$ da posição no tempo t.

Exercício 15: Prove que a formula de Glauber, $e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}+[\hat{A},\hat{B}]/2}$, é válida sempre que $[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] = [\hat{B},[\hat{A},\hat{B}]] = 0$.[1]

Exercício 16: Prove a relação $e^{i\alpha\sigma_x} = 1\cos\alpha + i\sigma_x \sin\alpha$, sendo 1 a matriz identidade e $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercício 17: Considere o operador de deslocamento $\hat{D}(\alpha) \equiv e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}$.
a. Utilizando a formula de Glauber, mostre que $\hat{D}(\alpha)$ é um operador unitário.
b. Mostre que $\hat{D}(\alpha) = e^{-|\alpha|^2/2}e^{\alpha\hat{a}^\dagger}e^{-\alpha^*\hat{a}}$.
c. Qual é o estado $|\alpha\rangle$ obtido da atuação do operador $\hat{D}(\alpha)$ no estado fundamental do OH?
d. Aplique o operador de abaixamento $\hat{a}$ sobre o estado $|\alpha\rangle$ obtido no item anterior. Qual é a relação obtida?
e. Considere agora que o OH seja preparado no estado $|\alpha\rangle$. Calcule os desvios quadráticos médios das quadraturas $\hat{x} \equiv \frac{a_{ho}}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$ e $\hat{p} \equiv \frac{\hbar}{a_{ho}\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$.
f. A partir dos resultados do item acima, obtenha a relação de incerteza $\Delta\hat{x}\Delta\hat{p}$ para o OH preparado no estado $|\alpha\rangle$. Analise o resultado.

Exercício 18: Considere um OH de massa m, frequência angular ω e carga elétrica q imerso num campo elétrico uniforme e paralelo ao eixo $\hat{e}_x$ de deslocamento do oscilador. Obtenha as energias dos estados estacionários do OH o mostre como obter os correspondentes autoestados.

[1] Veja Cohen-Tannoudji, Cap.II, Comp.B_{II},5-d